数理解析研究所講究録
639 巻 1988 年 39-56



# Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k,\alpha)$ in $\mathbb{C}^n$

金沢大・理　児玉秋雄 (Akio Kodama)

## 1 Introduction.

$\mathbb{C}^n$の領域 $D$ に対して, $Aut(D)$ をその正則自己同型群とする. 以下, $D$ の境界点 $p$ に対して,

$$(*)\begin{cases} D \text{ のあるコンパクト部分集合に含まれる点列 } \{k_\nu\} \text{ と} \\ Aut(D) \text{ の列 } \{g_\nu\} \text{ が存在して, } g_\nu(k_\nu) \to p \text{ である.} \end{cases}$$

が成立するとき, $(D, p)$ に対して $(*)$ が成立する と言う.

$\mathbb{C}^n$内の強擬凸領域のカテゴリーの中での, 正則自己同型群による, $n$次元開球 $B^n$ の特徴付けに関する B. Wong [8] の結果の拡張として, J. P. Rosay は次のことを示した:

定理 R [7]. $\mathbb{C}^n$内の有界領域 $D$ に対して, $D$ の強擬凸境界点 $p$ が存在し, かつ $(D, p)$ に対して $(*)$ が成立すると仮定する. このとき, $D$ は $B^n$ に双正則同値である.

この結果を見ていると, 自然に次の問題が起こる:

問題. 上の定理において, 点 $p$ が弱擬凸境界点である, すなわち, 点 $p$ において $D$ の局所定義関数の Levi 形式が

退化するときには，領域 $D$ に対していかなることがわかるだろうか？

最近，この問題に関連して，R. E. Greene - S. G. Krantz [2] は弱擬凸領域

$$E(m)=\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2+|z_n|^{2m}<1\}$$

$(1<m\in\mathbb{N})$ に対して，次のような特徴付けを得た。彼らの結果を述べる前に，点 $p=(1,0,\ldots,0)$ は $E(m)$ の弱擬凸境界点であることに注意しておこう。

定理 G-K [2]. $D$ を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で，次の条件をみたすものとする：

(1) $D$ の境界 $\partial D$ は $C^{n+1}$-smooth である。

(2) $p=(1,0,\ldots,0)\in\partial D$ である。

(3) $\mathbb{C}^n$ 内で，$p$ のある開近傍 $U$ が存在し $D\cap U=E(m)\cap U$ となる。

(4) $(D,p)$ に対して $(*)$ が成立する。

このとき，$D$ は $E(m)$ に双正則同値である。

彼らの定理の証明方法は，Kohn にはじまる $\bar\partial$-方程式の理論を用いるもので，非常に複雑である。従って，$\partial D$ 全体での $C^{n+1}$-smoothness の仮定は落せない。また，Rosay タイプの結果を示すには，問題になっている境界点 $p$ のある開近傍内

で $\partial D$ が $C^2$-smooth であればよいと思われる．実際，本稿の第一目的はこの点を明らかにすることである．

自然数 $k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ と実数 $\alpha > 0$ に対して

$$\rho(k, \alpha ; z) = -1 + \sum_{i=1}^{k} |z_i|^2 + \left( \sum_{j=k+1}^{n} |z_j|^2 \right)^{\alpha} ;$$

$$E(k, \alpha) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(k, \alpha ; z) < 0 \}$$

とおく．従って，$E(m) = E(n-1, m)$ であり，$k = n$ 又は $\alpha = 1$ のとき $E(k, \alpha) = B^n$ である．ここで一つ注意しておきたいことは，$\partial E(k, \alpha)$ は点 $p = (1, 0, \ldots, 0) \in \partial E(k, \alpha)$ において，一般的には smooth でないことである．さて，以上の記号のもとで，Greene-Krantz の結果は次のように一般化される [5]：

<u>定理 I</u>　$D$ を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で次の条件をみたすものとする：

(1)　$p = (1, 0, \ldots, 0) \in \partial D$ である．

(2)　$\mathbb{C}^n$ 内で，点 $p$ のある開近傍 $U$ が存在し $D \cap U = E(k, \alpha) \cap U$ となる．

(3)　$(D, p)$ に対して $(*)$ が成立する．

このとき，$D$ は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である．

正則写像族に対する正規族の理論を用いることにより，$\bar{\partial}$-方程式を用いることなく，定理 I の証明が出来る．

さて，定理Ⅰの(2)は非常にきつい条件であるので，これを落したいのであるが目下のところ，まだ完全には成功していない．しかし，収束 $\varphi_\nu(k_\nu)\to p$ にある種の条件を付けると，次のことがわかる．（$R$-$\lim$ の定義は 図 を見て下さい．）

定理Ⅱ．$D$ を $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で次の条件をみたすものとする：

(1) $p=(1,0,\ldots,0)\in\partial D$ である．

(2) $p$ の開近傍 $U$ と，連続関数 $\rho: U\to\mathbb{R}$ で

$$D\cap U=\{z\in U \mid \rho(z)<0\};$$

$$\rho(z)=\rho(k,\alpha;z)+R(z);$$

$$R(z)=o\Big(|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Big(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Big)^\alpha\Big)$$

$(z\to p)$，をみたすものが存在する．

(3) $D$ のあるコンパクト部分集合に含まれる点列 $\{k_\nu\}$ と $\mathrm{Aut}(D)$ 内の列 $\{\varphi_\nu\}$ が存在して，$R$-$\lim\varphi_\nu(k_\nu)=p$ である．

このとき，$D$ は $E(k,\alpha)$ に双正則同値である．

$p$ が強擬凸境界点である場合を考えれば，点 $p$ のまわりでの $D$ の局所定義関数 $\rho(z)$ が条件(2)にある形をしていることが最も合理的であることがわかる．また，条件(3)は model space $E(k,\alpha)$ に対しては常に成り立つ条件であることがわかる．

最後に，B. L. Fridman [1] の結果が，我々の model space $E(k,\alpha)$ に対しても成立することを示したい．すなわち，複素多様体 $M$, $D$ に対して，$M$ が $D$ の双正則像によって exhaust される とは，任意のコンパクト集合 $K\subset M$ に対して，$D$ から $M$ の中への双正則写像 $f_K : D\to M$ で $K\subset f_K(D)$ となるものが存在すること，と定義するとき次のことが成り立つ：

定理III． $n$ 次元双曲型多様体 $M$ が $E(k,\alpha)$ の双正則像によって exhaust されると仮定する．このとき，$M$ は $E(k,\alpha)$ と双正則同値であるか，または $M$ は開球 $B^n$ に双正則同値であるかのいずれかが成立する．

Fridman は上の定理において，$E(k,\alpha)$ のかわりに $\mathbb{C}^n$ 内の $C^3$-smooth 境界をもつ強擬凸有界領域 $D$ に対して同様の結果を示している．

## 2 $E(k,\alpha)$ の構造．

定理の証明に必要な $E(k,\alpha)$ の構造に関する結果をまとめておこう．

(2.1) $E(k,\alpha)$ は S. Kobayashi [4] の意味で完備双曲型である有界ラインハルト領域である．従って，$E(k,\alpha)$ は H. Wu [9] の意味で taut である [6]．

(2.2) 点 $q=(0,\dots,0,1)\in\partial E(k,\alpha)$ の近くで $\partial E(k,\alpha)$ は実解析的であり，かつ $q$ は $E(k,\alpha)$ の強擬凸境界点である．

(2.3) $\mathrm{Aut}(E(k,\alpha))$ は次の形の変換から成る連結リー群である： $z'=(z_1,\dots,z_k)$, $z''=(z_{k+1},\dots,z_n)$ とおくとき

$$(z',z'')\longmapsto\left(\frac{Az'+b}{cz'+d},\ \frac{U\cdot z''}{(cz'+d)^{1/2\alpha}}\right),\qquad \begin{pmatrix}A, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\in SU(k,1),\quad U\in U(n-k).$$

(2.4) 任意の点列 $\{p^\nu\}\subset E(k,\alpha)$, $p^\nu\longrightarrow p=(1,0,\dots,0)\in\partial E(k,\alpha)$ に対して，$\mathrm{Aut}(E(k,\alpha))$ 内の列 $\{\varphi_\nu\}$ で $\varphi_\nu(p^\nu)=(0,\dots,0,t_\nu)$, $0\leqq t_\nu<1$ となるものが存在する．

## $\boxed{3}$ 定理の証明の概略．

定理Ⅰの証明に定理Ⅱを用いるので，最初に定理Ⅱの証明を与える．そのために，まず $R$-$\lim$ の定義をしよう．$D$, $\rho$ を定理Ⅱにおける $\mathbb{C}^n$ の有界領域，および点 $p=(1,0,\dots,0)$ のまわりでの $D$ の局所定義関数とすると，

$$\rho(z)=2\mathrm{Re}(z_1-1)+|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Big(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Big)^{\alpha}$$
$$+\,o\Big(|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Big(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Big)^{\alpha}\Big)$$

と変形できる．これより，定数 $A,B$ を $0<A<1<B$ と

任意に定めるとき，必要ならば $U$ を中心 $p$，半径が十分小さな開球にとりなおして，$U$ 上において

$$(3.1)\quad 2\mathrm{Re}(z_1-1)+A\Big[|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Big(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Big)^{\alpha}\Big]$$

$$\leqq \rho(z)$$

$$\leqq 2\mathrm{Re}(z_1-1)+B\Big[|z_1-1|^2+\sum_{i=2}^{k}|z_i|^2+\Big(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\Big)^{\alpha}\Big]$$

が成立すると仮定してよい。従って，任意の点列 $\{p^{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}\subset D\cap U$，$p^{\nu}\to p$ をとるとき，各 $\nu=1,2,\ldots$ に対して，

$$\zeta(p^{\nu})=(\zeta_1(p^{\nu}),\ldots,\zeta_n(p^{\nu}))\in\partial D\cap U,\quad \lambda(p^{\nu})<0$$

が存在して，

$$p^{\nu}=\zeta(p^{\nu})+\lambda(p^{\nu})N,\quad N=(1,0,\ldots,0)$$

と書ける．この記号のもとで

定義．点列 $\{\mathrm{Re}(\zeta_1(p^{\nu})-1)/\lambda(p^{\nu})\}_{\nu=1}^{\infty}$ が有界数列であるとき，$R\text{-}\lim\limits_{\nu\to\infty}p^{\nu}=p$ と記す.

点 $p=(1,0,\ldots,0)$ において $\partial D$ が $C^1$-smooth の場合には，通常の意味で $\{p^{\nu}\}$ が $p$ に non-tangential に収束すれば $R\text{-}\lim p^{\nu}=p$ であることがわかる.

3.1. 定理II の証明の概略：座標変換 $(u_1,\ldots,u_n)=(z_1-1,z_2,\ldots,z_n)$ を行い，$u'=(u_1,\ldots,u_k)$，$u''=$

$(u_{k+1},\ldots,u_n)$ とおく. (3.1)より, $U$ 上において,

(3.2) $$2\mathrm{Re}\, u_1 + A[|u'|^2+|u''|^{2\alpha}] \leqq \rho(u) \leqq 2\mathrm{Re}\, u_1 + B[|u'|^2+|u''|^{2\alpha}],$$

かつ, $U$ は原点 0 中心の十分小さい半径をもつ開球であるとしてよい. さて, $\psi_p(u) = \exp u_1$ は $D$ の点 $p$ のまわりでの *local peaking function* であることがわかり, その結果, $\{\varphi_\nu\}$ は定数写像 $C_p: u \longmapsto p,\ u \in D$, に広義一様収束すると仮定してよい. さらに, すべての $\nu = 1, 2, \ldots$ に対し

$$p^\nu = \varphi_\nu(k_\nu) \in D \cap U, \qquad R\text{-}\lim \varphi_\nu(k_\nu) = p$$

としてよい. 従って, $N = (1, 0, \ldots, 0)$ に対して,

$$p^\nu = \zeta^\nu + \lambda^\nu N, \quad \zeta^\nu = (\zeta_1^\nu, \ldots, \zeta_n^\nu) \in \partial D \cap U, \quad \lambda^\nu < 0$$

とおくとき,

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Re}\, \zeta_1^\nu / |\lambda^\nu| = d_0 \in \mathbb{R}$$

が存在すると仮定してよい. 各 $\nu = 1, 2, \ldots$ に対して

$$r_\nu = |\lambda^\nu|^{1/2}, \qquad s_\nu = |\lambda^\nu|^{1/2\alpha}$$

とおく. $d_0 = 0$ と $d_0 \neq 0$ の2通りの場合があるが, $d_0 = 0$ の場合のみ証明する. ($d_0 \neq 0$ の場合も適当な座標変換を行えば同様に出来る.) このとき, (3.2)より

$$\left(\mathrm{Re}\, \zeta_1^\nu/|\lambda^\nu|,\ \zeta_i^\nu/r_\nu,\ \zeta_j^\nu/s_\nu,\ R(\zeta^\nu)/|\lambda^\nu|\right) \longrightarrow (0, 0, 0, 0)$$

$(1 \leqq i \leqq k < j \leqq n)$ がわかる. さて, $D$ を相対コンパクトな部分領域 $D_j$ の単調増大列で覆っておく:

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset \cdots \supset D_{j+1} \supset D_j \supset \cdots \supset D_1 \supset \overline{\{k_\nu \mid \nu = 1, 2, \ldots\}}.$$

任意の $j$ を固定するとき, 十分大きな番号 $\nu(j)$ が存在して,

$$\varphi_\nu(D_j) \subset D \cap U, \qquad \nu \geqq \nu(j)$$

となる. そこで正則写像列 $h_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $L_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $F^\nu : D_j \to \mathbb{C}^n$ $(\nu \geqq \nu(j))$ を次のように定義する:

$$h_\nu(u) = (u_1 - \zeta_1^\nu, \ldots, u_n - \zeta_n^\nu),$$

$$L_\nu(w) = (-w_1/\lambda^\nu, w_2/r_\nu, \ldots, w_k/r_\nu, w_{k+1}/s_\nu, \ldots, w_n/s_\nu),$$

$$F^\nu(u) = L_\nu \circ h_\nu \circ \varphi_\nu(u), \quad u \in D_j.$$

このとき, $\{F^\nu\}$ は $D_j$ から $\mathbb{C}^n$ 内の領域

$$W_\nu = (L_\nu \circ h_\nu)(D \cap U)$$
$$= \{w \in \mathbb{C}^n \mid (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}(w) \in U, \ \rho \circ (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}(w) < 0\}$$

の中への双正則写像列であるが, $\rho \circ (L_\nu \circ h_\nu)^{-1}$ を解析することにより $\{W_\nu\}$ は $E(k, \alpha)$ に双正則同値である $\mathbb{C}^n$ の領域

$$W(k, \alpha) = \left\{ w \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, 2\,\mathrm{Re}\, w_1 + \sum_{i=2}^{k} |w_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^{n} |w_j|^2\right)^\alpha < 0 \right\}$$

に収束することがわかる. このとき, $E(k, \alpha)$ が taut であることと, Kobayashi distances が正則写像の下で距離非増加性を持つことを用いて, $\{F_\nu\}$ の部分列 $\{F_{\nu_j}\}$ で双正則写像 $F : D \to W(k, \alpha)$ に収束するものが存在することがわ

かる.

<u>3.2.</u> <u>定理Iの証明の概略</u>: 定理II, IIIの証明のアイデアもこの定理Iの証明に含まれているので, 多少詳しく証明を与えることにする。まず $\{k_\nu\}$ はコンパクト集合に含まれているから, ある点 $k_0 \in D$ が存在して

$$k_\nu \longrightarrow k_0 \quad \text{as} \quad \nu \to \infty$$

としてよい. また, 点 $p$ のまわりでの *local peaking function* の存在性から

$\{\varphi_\nu\}$ は定数写像 $C_p : z \mapsto p$ に広義一様収束する

と仮定してよい. (2.4) から, 与えられた点列

$$p^\nu := \varphi_\nu(k_0) \in D \cap U = E(k,\alpha) \cap U, \quad p^\nu \to p$$

に対して, $\psi_\nu \in Aut(E(k,\alpha))$ が存在して

$$q^\nu := \psi_\nu(p^\nu) = (0, \ldots, 0, t_\nu), \quad 0 \leqq t_\nu < 1.$$

<u>Case 1.</u> <u>$\{q^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点 $q$ をもつ</u>: $q^\nu \to q$ と仮定してよい. $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ を定理IIのようにとるとき, 各 $j$ に対して, 十分大きい番号 $\nu(j)$ が存在して

$$\varphi_\nu(D_j) \subset D \cap U = E(k,\alpha) \cap U, \quad \nu \geqq \nu(j)$$

となる. そこで正則写像列

$$f^\nu := \psi_\nu \circ \varphi_\nu |_{D_j} : D_j \longrightarrow E(k,\alpha), \quad \nu \geqq \nu(j)$$

を考えると, $f^\nu(k_0) = q^\nu \longrightarrow q \in E(k,\alpha)$ であることと, $E(k,\alpha)$ が taut であることより $f^\nu \rightrightarrows f(j) : D_j \longrightarrow E(k,\alpha)$ と仮定し

てよい. 従って, 対角線論法により $f^\nu \rightrightarrows f: D \to E(k,\alpha)$ としてよい. $f$ が双正則写像であることを示したい. そのために

$$E_\nu := \psi_\nu(E(k,\alpha) \cap U) = \psi_\nu(D \cap U) \ ;$$

$$g^\nu := \varphi_\nu^{-1} \circ \psi_\nu^{-1}|_{E_\nu} : E_\nu \longrightarrow D$$

とおけば, 明らかに

(3.3) $\quad g^\nu \circ f^\nu = id.\ , \quad f^\nu \circ g^\nu = id.$

が成り立つ. また, $E(k,\alpha)$ の相対コンパクト部分領域 $E'$ を任意にとるとき, $\psi_\nu^{-1}(E') \longrightarrow \{p\}$ である. 従って, ある番号 $\nu_0$ が存在して $E' \subset E_\nu,\ \nu \geqq \nu_0$ となる. この事実と $D$ が有界領域であることから $g^\nu \rightrightarrows g: E(k,\alpha) \longrightarrow \overline{D} \subset \mathbb{C}^n$ と仮定してよい. もしも, $g(E(k,\alpha)) \subset D$ であることがわかれば (3.3) より $f: D \to E(k,\alpha)$ は双正則同型であることがわかる. さて, 十分大きいすべての $\nu$ に対して, $[f(\overline{D}_1) \cup f^\nu(\overline{D}_1)] \subset E' \subset E(k,\alpha)$ となる相対コンパクト領域 $E'$ が存在する. 従って, $g^\nu(f^\nu(\overline{D}_1)) = \overline{D}_1$ において $\nu \to \infty$ として, $D_1 \subset g(E') \subset g(E(k,\alpha))$ を得る. これより, $g(E(k,\alpha))$ は空集合でない開集合を含むから $g$ は開写像となることがわかり, 特に $g(E(k,\alpha)) \subset D$ と結論出来る.

<u>Case 2. $\{g^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点をもたない)</u>: この場合, $D$ と $E(k,\alpha)$ がともに開球 $B^n$ に正則同値であることを示したい.

$$g^\nu \longrightarrow g := (0,\dots,0,1) \in \partial E(k,\alpha)$$

と仮定してよい. (2.2)より $q$ は $E(k,\alpha)$ の強擬凸境界点であるから, 点 $q$ の十分小さい開近傍 $W$ 上で定義された $C^2$-smooth な強多重劣調和関数 $\rho: W \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$E(k,\alpha)\cap W = \{z\in W \mid \rho(z)<0\},\quad d\rho(z)\neq 0,\ z\in\partial E(k,\alpha)\cap W$$

となる. このとき, 点 $q$ のまわりでの適当な座標系 $w=(w_1,\dots,w_n)$ をとれば, この座標系に関して, 次のことが成立することがわかる:

(3.4) $q=(0,\dots,0)$ ;

(3.5) $q^\nu=(0,\dots,0,\delta_\nu)$, $(\delta_\nu,\ \delta_\nu/|\delta_\nu|)\longrightarrow(0,-1)$ ;

(3.6) $'w=(w_1,\dots,w_{n-1})$ とおくとき, 適当な複素数 $c_j$ に対して

$$\rho(w) = 2\mathrm{Re}\, w_n + |'w|^2 + A(w)\ ;$$

$$A(w) = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j w_j \overline{w_n}\right) + o(|w|^2).$$

従って, $\mathbb{R}\ni 0$ のまわりで定義された連続関数 $\varepsilon(x)$ と定数 $C>0$ とが存在して次のことが成り立つ:

(3.7) $\varepsilon(x)\longrightarrow 0 \quad (x\to 0)$ ;

(3.8) $|A(w)| \leqq C|w||w_n| + \varepsilon(|w|^2)|w|^2$ near $w=0$.

$D=\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ を以前のものとし, 任意に固定した $j$ に対して, 正則写像列 $f^\nu = \psi_\nu\circ\varphi_\nu|D_j : D_j\to E(k,\alpha)$ を考えると $f^\nu(k_0)=q^\nu\to q=(0,\dots,0)\in\partial E(k,\alpha)$, かつ $q$ が強擬凸境界点であることより $f^\nu \rightrightarrows C_q$ と仮定してよい. 従って, 十分大きい $\nu_j$ が存在して

$$f^\nu(D_j)\subset E(k,\alpha)\cap W,\quad \nu\geqq\nu_j$$

が成り立つ．そこで，正則写像列 $L_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$F^\nu : D_j \to \mathbb{C}^n$ を次のように定義する：

$$L_\nu(w) = ('w/\sqrt{|\delta_\nu|}, -w_n/\delta_\nu), \quad w \in \mathbb{C}^n \ ;$$
$$F^\nu(z) = L_\nu(f^\nu(z)), \quad z \in D_j .$$

このとき，$F^\nu(k_0) = (0, \ldots, 0, -1)$ かつ $F^\nu(D_j)$ は領域

$$W_\nu := L_\nu(E(k, \alpha) \cap W) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid L_\nu^{-1}(w) \in W, \ \rho \circ L_\nu^{-1}(w) < 0\}$$

に含まれる．さて，今

$$\rho^\nu(w) = [\rho \circ L_\nu^{-1}(w)]/|\delta_\nu| , \quad A^\nu(w) = [A \circ L_\nu^{-1}(w)]/|\delta_\nu|$$

とおけば次のことが成り立つことがわかる：

(3.9) $$\rho^\nu(w) = 2\mathrm{Re}(-\delta_\nu w_n/|\delta_\nu|) + |'w|^2 + A^\nu(w) \ ;$$

(3.10) $$|A^\nu(w)| \leqq [C\sqrt{|\delta_\nu|} + \Gamma(|L_\nu^{-1}(w)|^2)] \cdot |w|^2 .$$

従って，$w^\nu = F^\nu(z)$，$z \in D_j$ とおけば，(3.9)，(3.10) より

(3.11) $$\begin{aligned} |w_n^\nu + \delta_\nu/|\delta_\nu||^2 - 1 &= |w_n^\nu|^2 + 2\mathrm{Re}(\delta_\nu w_n^\nu/|\delta_\nu|) \\ &> |w^\nu|^2(1 + A^\nu(w^\nu)/|w^\nu|^2) \\ &\geqq |w^\nu|^2/2 \geqq 0 . \end{aligned}$$

これは，$\delta_\nu/|\delta_\nu| \to -1$ に注意すれば，十分大きいすべての $\nu$ に対して，$F_n^\nu$ は $D_j$ から taut 領域 $\mathbb{C} \setminus \{1/2, 1\}$ への正則写像であることを示している．すべての $\nu$ に対して，$F_n^\nu(k_0) = -1$ であったから，$F_n^\nu \rightrightarrows F_n(j) : D_j \to \mathbb{C} \setminus \{1/2, 1\}$，従って (3.11) より $\{F^\nu\}$ は正則写像 $F(j) : D_j \to \mathbb{C}^n$ に広義一様収束すると仮定してよい．一方，$\rho^\nu(w) \rightrightarrows 2\mathrm{Re}\, w_n + |'w|^2$

であるから，$\{W_\nu\}$ は開球 $B^n$ に双正則同値である領域 $W = \{w \in \mathbb{C}^n \mid 2\mathrm{Re}\, w_n + |'w|^2 < 0\}$ に収束する．このとき，Case 1 と同様にして，$\{F^\nu\}$ の部分列 $\{F^{\nu_k}\}$ で双正則写像 $F: D \to W$ に広義一様収束するものが存在することがわかる．特に，$D$ は等質領域となる．従って，適当な列 $\{\sigma_\nu\} \subset Aut(D)$ に対して，$R\text{-}\lim \sigma_\nu(k_0) = p$ と出来る．このとき，定理 II より $D$ は $E(k,\alpha)$ と双正則同値であることが結論される．

3.3. 定理 III の証明の概略：任意に点 $k_0 \in M$ を固定し $M$ を相対コンパクト部分領域 $M_j$ の単調増大列で覆っておく：

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j \supset \cdots \supset M_{j+1} \supset M_j \supset \cdots \supset M_1 \ni k_0 .$$

$M$ は $E(k,\alpha)$ の双正則像で exhaust されているから，$E(k,\alpha)$ から $M$ の中への双正則写像列 $\psi_\nu : E(k,\alpha) \to M$ が存在して，

$$M_\nu \subset \psi_\nu(E(k,\alpha)), \quad \nu = 1, 2, \cdots$$

となる．従って正則写像列

$$\varphi_\nu := \psi_\nu^{-1} : \psi_\nu(E(k,\alpha)) \longrightarrow E(k,\alpha), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

は $M$ の任意のコンパクト集合上で一様にある正則写像 $\varphi : M \longrightarrow \overline{E(k,\alpha)} \subset \mathbb{C}^n$ に収束したと仮定してよい．また，必要ならば $\psi_\nu, \varphi_\nu$ を適当に $\psi_\nu \circ \sigma_\nu^{-1}$，$\sigma_\nu \circ \varphi_\nu$ ($\sigma_\nu \in Aut(E(k,\alpha))$) と取りかえることにより

$$q^\nu := \varphi_\nu(k_0) = (0, \ldots, 0, t_\nu), \quad 0 \leqq t_\nu < 1$$

と仮定してよい．

<u>Case 1. $\{q^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点 $q$ をもつ</u>: このとき，まず Kobayashi distances の正則写像のもとでの距離非増加性より，M は $\mathbb{C}^n$ のある有界領域 D と同一視出来ることがわかる．従って，証明は定理 I，Case 1 に帰着され，M と $E(k,\alpha)$ とが双正則同値であることがわかる．

<u>Case 2. $\{q^\nu\}$ が $E(k,\alpha)$ 内に集積点をもたない</u>: このとき，$q^\nu \to q := (0,\dots,0,1) \in \partial E(k,\alpha)$ としてよい．また，$q$ が $E(k,\alpha)$ の強擬凸境界点であることから $\varphi_\nu \rightrightarrows C_q$ と仮定してよい．このとき，定理 I の証明中の Case 2 のように，$q$ のまわりでの座標系 $w=(w_1,\dots,w_n)$ を導入し，正則写像列 $L_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$F^\nu : M_\nu \to \mathbb{C}^n$ を

$$L_\nu(w) = ('w/\sqrt{|\delta_\nu|}, -w_n/\delta_\nu),\quad F^\nu(x) = L_\nu(\varphi_\nu(x))$$

と定義すれば，定理 I の証明の Case 2 とまったく同様にして，$\{F^\nu\}$ の部分列 $\{F^{\nu_\mu}\}$ で双正則写像 $F : M \to W \cong B^n$ に広義一様収束するものが存在することがわかる．

## [4] 2つの注意．

<u>4.1.</u> D を $\mathbb{C}^n$ 内の領域とし，$p$ を $\overline{D}$ の一点とする．$d_D$ で D の Kobayashi pseudodistance を表す．このとき，

<u>定義.</u> 点 $p$ の $\mathbb{C}^n$ における任意の近傍 $W$ に対して，$p$ のある近傍 $V$ が存在して

$$\overline{V} \subset W, \quad d_D(D \cap (\mathbb{C}^n \setminus W), D \cap V) > 0$$

となるとき，Dは点 p で双曲的に埋込まれている，という.

P. Kiernan [3] の結果によれば，$\mathbb{C}^n$ の任意の有界領域 D に対しては，D は任意の点 $p \in \partial D$ で双曲的に埋込まれている。

注意 1. 定理 I, II において，$\mathbb{C}^n$ 内の領域 D は有界である必要はなく，一般に「D は点 p で双曲的に埋込まれている」という条件でおきかえられる.

任意の自然数 $n_1, \ldots, n_s$ と任意の実数 $\alpha_2, \ldots, \alpha_s > 0$ に対して，有界ラインハルト領域 E を次のように定義する:

$$E = \left\{ (z_1, \ldots, z_s) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_s} \;\middle|\; |z_1|^2 + \sum_{i=2}^{s} |z_i|^{2\alpha_i} < 1 \right\}.$$

注意 2. 定理 II と同様の結果は，有界ラインハルト領域 E に対しても成立する.

参考文献

[1] B. L. Fridman, *Biholomorphic invariants of a hyperbolic manifold and some applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 276 (1983), 685-698.

[2] R.E. Greene and S.G. Krantz, Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains with non-compact automorphism groups, Lect. Notes in Math. 1268, Springer-Verlag, 1987, 121–157.

[3] P. Kiernan, On the relations between taut, tight and hyperbolic manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 49–51.

[4] S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, 1970.

[5] A. Kodama, Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k,\alpha)$ in $\mathbb{C}^n$, to appear in Tōhoku Math. J. 1988.

[6] P. Pflug, About the Carathéodory completeness of all Reinhardt domains, Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II (G.I. Zapata, ed.), 1984, 331–337.

[7] J.P. Rosay, Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29, 4 (1979), 91–97.

[8] B. Wong, Characterization of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphism group, Invent. Math. 41 (1977),

253–257.

[9] H. Wu, *Normal families of holomorphic mappings*, Acta Math. 119 (1967), 193–233.